На правах рукописи

Садиков Павел Валерьевич

МОДИФИКАЦИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург
2012

Диссертация выполнена в ФГБОУВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» на кафедре сопротивления материалов.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор Харлаб Вячеслав Данилович

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита состоится «__»_____ 201_ года в ____ часов на заседании диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 212.223.03 при ФГБОУВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по адресу: 190005, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д.4, зал заседаний.

Эл. почта: rector@spbgasu.ru
Тел/факс: (812) 316-58-72

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет».

Автореферат разослан «__» _____2012 г.

Ученый секретарь,
доктор технических наук Л. Н. Кондратьева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Проблема прочности, являющаяся главной проблемой сопротивления материалов, многогранна. Она включает в себя, в-частности, следующие фундаментальные вопросы.

1. Оценка локальной мгновенной прочности упругого тела при заданных в рассматриваемой точке напряжениях и характеристиках материала. Теории прочности, занимающиеся этим вопросом, называются классическими (по постановке вопроса).

2. Учет так называемого градиентного эффекта прочности, т. е. того экспериментально обнаруженного факта, что прочность в данной точке тела зависит не только от напряженного состояния в этой точке, но и от скорости изменения напряженного состояния по координатам (росту градиента напряженного состояния отвечает увеличение прочности тела). Данный эффект может быть весьма значительным в самых обычных случаях, что не позволяет не принимать его в расчет.

3. Определение прочности тела в сингулярных точках, где напряжения, найденные упругим расчетом, бесконечны. Надо заметить, что бесконечные напряжения отвечают сколь угодно малой нагрузке, тем не менее разрушение наступает лишь при критическом уровне нагрузки. Конечно, использование теории пластичности (псевдопластичности в случае хрупких материалов) может избавить от бесконечных напряжений (не всегда). Но такой подход сопряжен с большими трудностями, по сравнению с традиционным упругим расчетом. Поэтому желательно научиться определять запас прочности тела, опираясь на фиктивные бесконечные напряжения, доставляемые упругим расчетом.

Прочие вопросы (влияние времени на прочность в условиях ползучести; усталостное разрушение под действием циклических нагрузок; образование и развитие микро- и макротрещин в теле; статистические аспекты прочности; масштабный эффект прочности; физические аспекты прочности, т. е. связь прочности со структурой материала и внешними факторами и др.) выходят за рамки диссертации и поэтому далее не обсуждаются.

Диссертация посвящена рассмотрению второго и третьего из перечисленных выше вопросов. При этом классические теории прочности, отнесенные к первому вопросу, служат базой для обобщений.

Все указанные вопросы интенсивно разрабатываются и существенно продвинуты в своем решении. Тем не менее ни один из них не может считаться решенным исчерпывающим образом, в-частности, остаются многочисленные расхождения теоретических разработок с опытом. Этим определяется **актуальность** темы диссертации.

Степень изученности проблемы

Градиентный эффект экспериментально обнаружен в начале XX века.

Опытные данные 20-30-х годов не могу считаться достоверными из-за неразвитой технической базы, однако все они качественно подтверждают влияние градиентного эффекта на прочность. Можно выделить опыты Эйзелина, Бирета, Тума и Вундерлиха, Тимошенко. На основе первых опытных данных предприняты попытки вывести теоретические зависимости, отражающие градиентный эффект. Среди них выделяются работы Ринагля, Кунце, Прагера, Серенсена. С появлением новых средств измерения опытные данные приобретают количественную надежность. Например, опыты Баскуля и Мазо о растяжении пластин с круглым отверстием послужили базой для дальнейших теоретических исследований. Упомянутые авторы, а также Кениг и Ольшак, Бран, Гениев и другие предложили свои формулы для учета градиентного эффекта. Эти формулы в разном виде содержали не только эквивалентное напряжение, но и его производную (градиент). Общим недостатком этих предложений является наличие множества экспериментальных постоянных. При этом в работах не указан способ их определения. Другой недостаток – отсутствие теоретического обоснования. Как правило, формулы являлись обработкой экспериментальных данных.

Существенная работа по вопросам прочности бетона проведена во Всесоюзном научно-исследовательском институте гидротехники. Опыты Мальцова, Караваева, Пака показывают влияние градиентного эффекта на прочность бетона. Мальцовым предложена простая эмпирическая формула, хорошо отражающая экспериментальные данные. В 90-2000-х годах в Новосибирске выполнен ряд работ, посвященных учету градиентного эффекта. Новопашиным, Сукнёвым, Леганом и другими разработан хорошо обоснованный градиентный критерий прочности, содержащий один структурный параметр материала. Критерий хорошо согласуется с опытными данными для металлов. В последнее время он распространен авторами на хрупкие материалы. Другой градиентный критерий, относящийся к хрупким материалам, в 90-е годы предложил В. Д. Харлаб. Он применил его к решению ряда важных задач и получил хорошие результаты. Несмотря на то, что градиентная теория Харлаба обладает существенными преимуществами, о чем будет сказано ниже, она оставляет некоторые возможности для развития, которые осуществлены в диссертационной работе.

Несмотря на большое количество исследований, направленных на учет градиентного эффекта, этот вопрос остается до конца не решенным.

Цель, задачи и методы исследования

Целью диссертации является разработка метода учета градиентного эффекта прочности применительно к хрупким материалам в регулярных и сингулярных точках. При этом ставится задача опереться на теорию упругости, предоставляющую наиболее простой расчётный аппарат, по сравнению с другими разделами механики деформируемого твердого тела.

Методами исследований являются аналитические разработки вопросов, опирающиеся на исходные предпосылки.

Научная новизна работы

Отправной точкой нашего исследования послужила градиентная теория хрупкого разрушения, разработанная научным руководителем диссертанта – В. Д. Харлабом. Отметим некоторые важные ее особенности.

1. Автор сумел объединить второй и третий вопросы прочности в одно целое, опираясь на предположение, что бесконечно большие градиенты напряжений в сингулярных точках позволяют материалу сохранять прочность при бесконечно больших напряжениях (пока нагрузка не достигла некоторого критического уровня).

2. В разработанной теории регулярные и сингулярные напряжения оказались равноправными, а это означает, что неправомерно отбрасывать (как это обычно делают) конечные напряжения из суммы их с бесконечными. Следствием оказалось исчезновение ряда парадоксов (например того, что бесконечно малое отверстие в центре диска вдвое уменьшает прочность диска, или того, что достаточно малая трещина упрочняет материал).

3. Теория охватывает широкий круг задач и позволяет решать новые для механики задачи (например, прочность среды под сосредоточенной силой).

Теория В. Д. Харлаба подтверждается разумностью вытекающих из нее следствий и согласием результатов с данными опытов.

Вместе с тем, рассматриваемая теория предоставляет возможности для ее развития в нескольких направлениях, что дополняет актуальность темы диссертации.

Во-первых, требуемое теорией преобразование классических критериев прочности в градиентные является затруднительным в случае нелинейности исходных критериев и при многократном использовании преобразования, связанном с наилучшим выбором классического критерия. Эта трудность требует преодоления.

Во-вторых, переход от регулярного к сингулярному случаю выглядит в ней не вполне естественным. Желательно устранить этот недостаток.

В-третьих, остался неохваченным один очень важный вид проявления сингулярности – расходимость рядов.

Перечисленные три пункта составляют программу диссертации и получают свое решение. В этом заключается **научная новизна** работы.

Практическая значимость работы

Так как градиентный эффект прочности бетона и других хрупких материалов является весьма существенным фактором и для его учета в диссертации предлагаются достаточно простые средства, то это составляет **практическую значимость** диссертационного исследования.

Достоверность результатов исследования подтверждается согласием их с опытом и естественностью предпосылок теории.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены в докладах:

59-ой международной научно-технической конференции молодых ученых (аспирантов, докторантов) и студентов, СПбГАСУ, 2006 г.;

62-ой международной научно-технической конференции молодых ученых (аспирантов, докторантов) и студентов, СПбГАСУ, 2009 г.;

64-ой международной научно-технической конференции молодых ученых, СПбГАСУ, 2011 г.;

68-ой научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета, СПбГАСУ, 2011 г.;

XXIV международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» (BEM&FEM), СПбГАСУ, 2011 г.;

I международном конгрессе молодых ученых (аспирантов, докторантов) и студентов, СПбГАСУ, 2012 г.

Публикации

Результаты исследования опубликованы в 6 статьях, 3 из которых – в рецензируемых изданиях, включенных в список ВАК РФ.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 89 страницах и состоит из введения, пяти глав, заключения, перечня использованной литературы.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1) Идея градиентного преобразования главных напряжений с последующей их подстановкой в классический критерий прочности (вместо преобразования сразу всего критерия), что существенно упрощает применение подхода.

Ниже кратко излагается суть идеи. Главные напряжения должны быть представлены в следующем виде:

$$\sigma_i = F_i(x) + \Phi_i(x)\Psi_i(r), \tag{1}$$

где $F(x)$ и $\Phi(x)$ – регулярные функции, а $\Psi(r)$ – сингулярная функция, то есть $\Psi(0) \to \infty$. Напряжения (1) подвергаются градиентному преобразованию В. Д. Харлаба:

$$\sigma_{i\nabla} = \frac{F_i(x_0)}{1+\delta\dfrac{|\nabla F_i(x_0)|}{|F_i(x_0)|}} + \frac{\Phi_i(x_0)}{1+\delta\dfrac{|\nabla \Phi_i(x_0)|}{|\Phi_i(x_0)|}}\Psi_i(r_*), \tag{2}$$

где $\sigma_{i\nabla}$ – главное градиентное напряжение, на которое при проверке прочности заменяется классическое главное напряжение σ_i; δ – структурный параметр материала с размерностью длины, определяемый по опытным данным о чистом изгибе балки; ∇ – символ градиента. Чтобы оценить прочность с учетом градиентного эффекта, полученные таким образом градиентные напряжения (2)

необходимо подставить в выражение критерия прочности S по выбранной теории

$$S_{\nabla} = f(\sigma_{1\nabla}, \sigma_{2\nabla}, \sigma_{3\nabla}) = R, \tag{3}$$

где R – предельный параметр прочности по выбранной теории.

2) В случае сингулярного напряженного состояния многократное использование обычного градиентного преобразования вместо специального преобразования, предложенного научным руководителем, что дает оригинальную новую формулу.

Предполагается, что прочность в сингулярных точках сохраняется (несмотря на бесконечно большие напряжения) за счет сильного градиентного эффекта. Предложено «сильный градиентный эффект» учитывать применением градиентного преобразования несколько раз. Использование регулярной части градиентной формулы (2) n раз применительно к сингулярной функции степенного вида

$$S(r) = k/r^n \tag{4}$$

приводит к конечному значению S, численно равному значению функции при $r = r^* = \sqrt[n]{n!}\delta$ или в более общем случае нецелых n

$$r^* = [\Gamma(n+1)]^{1/n}\delta, \tag{5}$$

где δ – структурный параметр материала из градиентной теории, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Другими словами, для оценки прочности в сингулярной точке, следует рассматривать некоторую регулярную точку на расстоянии r^* от первой.

3) Учет сингулярностей нестепенного вида.

При попытке распространения предлагаемого подхода на другие виды сингулярности можно заметить, что результат (5) является корнем системы уравнений

$$\begin{cases} \delta\Psi'(\xi\delta) = -\Psi(\xi\delta) \\ \Psi(\delta) = \Gamma(\xi+1)\Psi(r^*) \end{cases} \tag{6}$$

для сингулярности степенного вида (4). ξ – вспомогательный безразмерный параметр. Предлагается использовать данную систему для нахождения r^* и для других видов сингулярных функций. Система (6) используется следующим образом. Сначала из первого уравнения следует найти вспомогательную величину ξ. Затем, подставив ее во второе уравнение, определить искомое значение r^*. Отметим, что система (6) является аналогом определяющего r^* уравнения из теории В. Д. Харлаба. Величины r^*, определенные по исходной теории и из системы (6), отличаются тем сильнее, чем «дальше» n от единицы. При n=1 результаты двух подходов совпадают.

4) Решение ряда конкретных задач с использованием исходного и модифицированного подходов и с привлечением различных классических теорий прочности. В диссертации рассмотрено большое число задач, в автореферате приводятся лишь некоторые решения в иллюстративных целях.

Далее применение модификации, описанной в пункте 1, демонстрируется

на примере решения **задачи Ляме**. Рассматривается толстостенное кольцо, находящееся под действием внутреннего давления p. Главные напряжения в этом случае определяются по известным формулам теории упругости:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \cdot (\frac{b^2}{r^2} + 1),$$
$$\sigma_3 = \sigma_r = -\frac{pa^2}{b^2 - a^2} \cdot (\frac{b^2}{r^2} - 1), \qquad (7)$$
$$\sigma_2 = 0,$$

где, σ_r, σ_θ – напряжения в полярных координатах; a, b – соответственно внутренний и внешний радиусы кольца.

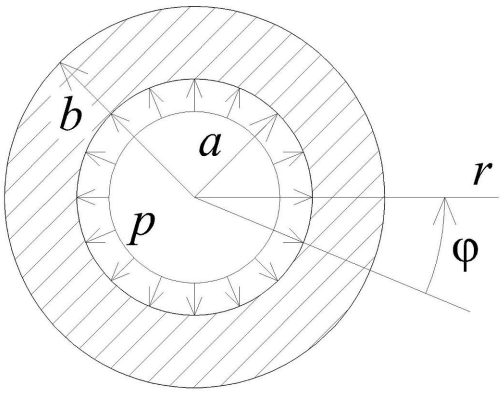

Рис. 1. Задача Ляме

В соответствии с предлагаемым подходом необходимо перейти к градиентным напряжениям по формуле (2).

$$\sigma_{\nabla 1} = \sigma_{\nabla\theta} = \frac{pa^2\left(b^2 + r^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right)r^2}\left[1 + \frac{2\delta}{r} \cdot \frac{b^2}{b^2 + r^2}\right]^{-1} = \frac{\sigma_1}{\xi_1(r)},$$
$$\sigma_{\nabla 3} = \sigma_{\nabla r} = -\frac{pa^2\left(b^2 - r^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right)r^2}\left[1 + \frac{2\delta}{r} \cdot \frac{b^2}{b^2 - r^2}\right]^{-1} = \frac{\sigma_3}{\xi_3(r)}, \qquad (8)$$
$$\xi_1(r) = 1 + \frac{2\delta}{r} \cdot \frac{b^2}{b^2 + r^2}, \quad \xi_3(r) = 1 + \frac{2\delta}{r} \cdot \frac{b^2}{b^2 - r^2}.$$

Исследование критериев прочности по различным теориям как функций полярной координаты r показывает, что во всех случаях эти функции имеют максимальное значение на внутреннем контуре кольца, т. е. при $r=a$. Исходя из этого, в опасной точке напряжения будут следующими:

$$\sigma_1 = p \cdot C, \quad \sigma_3 = -p, \quad C = \left(b^2 + a^2\right) / \left(b^2 - a^2\right) \qquad (9)$$

$$\sigma_{\nabla 1} = \frac{\sigma_1}{\psi_1}, \qquad \sigma_{\nabla 3} = \frac{\sigma_3}{\psi_3},$$
$$\psi_1 = 1 + \frac{2\delta}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2 + a^2}, \quad \psi_3 = 1 + \frac{2\delta}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \qquad (10)$$

В качестве примера воспользуемся критерием прочности по теории Лебе-

дева

$$0{,}5\chi^2\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]+\left(1-\chi^2\right)\sigma_1^2=R_t^2,\ \chi=R_t/R_c\ . \quad (11)$$

Здесь R_t – предел прочности при осевом растяжении, R_c – предел прочности при осевом сжатии. Подставляя в уравнение (11) градиентные напряжения (10), и выразив из полученного равенства $S_\nabla=R_t^2$ нагрузку p, получаем:

$$S_\nabla=\left[\frac{pa^2}{\left(b^2-a^2\right)r^2}\right]^2\left\{\chi^2\left[\left(\frac{b^2+r^2}{\xi_1(r)}\right)^2+\frac{b^4-r^4}{\xi_3(r)\xi_1(r)}+\left(\frac{b^2-r^2}{\xi_3(r)}\right)^2\right]+\left(1-\chi^2\right)\left(\frac{b^2+r^2}{\xi_1(r)}\right)^2\right\},$$

$$p=R_t\frac{\left(b^2-a^2\right)r^2}{a^2}\left[\chi^2\frac{b^2-r^2}{\xi_3(r)}\left(\frac{b^2+r^2}{\xi_1(r)}+\frac{b^2-r^2}{\xi_3(r)}\right)+\left(\frac{b^2+r^2}{\xi_1(r)}\right)^2\right]^{-0.5}.$$

Разрушающая нагрузка в опасной точке имеет вид:

$$p_*=R_t\left[\frac{\chi^2}{\psi_3}\left(\frac{C}{\psi_1}+\frac{1}{\psi_3}\right)+\frac{C^2}{\psi_1^2}\right]^{-0.5}. \quad (12)$$

Легко заметить, что при $\xi_1(r)=\xi_3(r)=\psi_1=\psi_3=1$, то есть, когда δ=0, (12) дает решение без учета градиентного эффекта.

Чтобы получить решение этой задачи на основе исходной теории, необходимо в критерий прочности (11) подставить исходные напряжения (7) и подвергнуть весь критерий прочности S градиентному преобразованию, аналогичному (2), получив, таким образом, градиентный критерий. Из условия разрушения $S_\nabla=R_t^2$ определяется разрушающая нагрузка. В диссертации приводится решение задачи Ляме на основе разных классических теорий прочности. Численные результаты сведены в таблицу 1. В качестве исходного материала выбран бетон класса В12,5 с R_c=67,5×10^5 Па, R_t=6×10^5 Па, δ=6,7 см, μ=0,2; в качестве объекта рассмотрена условная конструкция с параметрами a=0,25 м, b=1 м.

Таблица 1

Результаты определения разрушающей нагрузки в задаче Ляме

Вид теории	Разрушающая нагрузка p, Па		
	без учета градиентного эффекта	с учетом исходной градиентной теории	с учетом модифицированного подхода
теория максимальных удлинений	3.130×10^5	3.860×10^5 (18.9%)	3.855×10^5 (18.8%)
теория Кулона-Мора	3.418×10^5	4.175×10^5 (18.1%)	4.173×10^5 (18.1%)
теория Лебедева	3.586×10^5	4.289×10^5 (16.4%)	4.358×10^5 (17.7%)
теория Липатова	3.590×10^5	4.363×10^5 (17.7%)	4.362×10^5 (17.7%)
теория Дощинского	3.921×10^5	4.741×10^5 (17.3%)	4.741×10^5 (17.3%)
теория Боткина	3.812×10^5	4.619×10^5 (17.5%)	4.619×10^5 (17.5%)

В таблице 1 в скобках указано повышение прочности за счет градиентного эффекта. Градиентный эффект для рассмотренной задачи в зависимости от выбранной исходной теории прочности составляет 17,3–18,9%. Отметим, что при большей неоднородности напряженного состояния он может быть намного

выше. Максимальное различие между предлагаемым и исходным подходом В. Д. Харлаба составляет всего 1,3%. Как видно, разброс, обусловленный применением разных теорий прочности, выше, чем разница между исходным и предлагаемым подходом. При этом предлагаемый подход позволяет существенно упростить применение аппарата.

Применение модификации из пункта 2 демонстрируется при решении **задачи о вдавливание в полупространство полубесконечного штампа**. Вдавливание происходит под действием погонной силы $\overline{P}$, штамп шириной 2*l* считается плоским и абсолютно жестким.

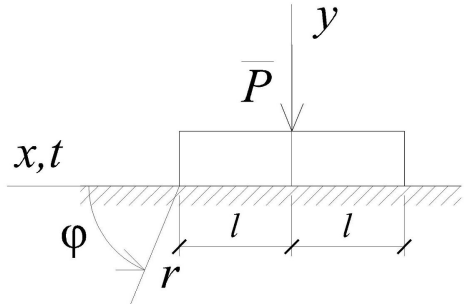

Рис. 2. Задача о вдавливании в полупространство жесткого штампа

В первом приближении рассмотрим распределение давления непосредственно под подошвой штампа. Оно определяется известной формулой:

$$p(t) = \overline{P} \Big/ \left(\pi\sqrt{l^2 - t^2}\right). \tag{13}$$

Здесь *t* – координата вдоль границы штампа и плоскости от его центра. После замены переменной $t = l - r$ при $r \to 0$ давление оказывается бесконечным. Чтобы установить вид сингулярности, следует преобразовать знаменатель дроби, отбросив бесконечно малые величины второго порядка:

$$p(r) = \overline{P} \Big/ \left(\pi\sqrt{l^2 - (l-r)^2}\right) = \overline{P} \Big/ \left(\pi\sqrt{2lr - r^2}\right) \approx \overline{P} \Big/ \left(\pi\sqrt{2lr}\right). \tag{14}$$

Выражение (14) показывает, что в данной задаче имеет место сингулярность степенного вида (4) при *n*=0,5. Согласно исходной теории о прочности следует судить по условным напряжениям на расстоянии $r^* = n\delta = 0{,}5\delta$ от сингулярной точки, а согласно предложению (5), описанному в пункте 2, – на расстоянии $r^* = [\Gamma(1+n)]^{1/n}\delta = \Gamma^2(1{,}5)\delta$.

Если принять условие разрушения в виде $p(r)=R_c$, то разрушающая нагрузка выражается следующим образом:

$$\overline{P}^* = \pi\sqrt{2lr^*}R_c. \tag{15}$$

Полученную разрушающую нагрузку, отнесенную к представительной площади (площади, характеризующей структуру материала), можно рассматривать как предел прочности материала на смятие. В нашем случае за представительную площадь логично принять квадрат со стороной δ, и *l*=0,5δ. Таким образом:

$$R_{loc} = P^* \big/ \delta^2 = \overline{P}^* \delta = (\pi/\delta)\sqrt{2lr^*}R_c. \tag{16}$$

Подставляя в (16) значения *r**, находим для исходного подхода R_{loc}/R_c=2,74, а для модифицированного R_{loc}/R_c=2,22.

Формула Баушингера, включенная в СНиП «Бетонные и железобетонные конструкции» для рассматриваемого случая дает

$$R_{loc}/R_c = \sqrt[3]{A/A_{loc}} = \sqrt[3]{3\delta^2/\delta^2} = \sqrt[3]{3} = 1{,}44. \qquad (17)$$

Здесь A_{loc} – площадь смятия (в нашем случае – площадь квадрата со стороной δ); A – так называемая расчетная площадь, которую, опираясь на СНиП, можно принять как площадь прямоугольника со сторонами 3δ и δ.

Таким образом, теоретические результаты не приводят к удовлетворительному соответствию с эмпирической формулой. Это можно объяснить тем, что формула (13) не дает полного представления о напряженно-деформированном состоянии полупространства. Очевидно, следует рассмотреть полную картину напряжений. Поскольку нас интересуют только напряжения вблизи грани штампа, можно обратиться к формулам, полученным на основании сведений, приведенных в книге А. Надаи:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\left(\overline{P}/4\pi\sqrt{2lr}\right)\left(\sin(3\varphi/2) + 5\sin(\varphi/2)\right), \\ \sigma_\theta &= -\left(\overline{P}/4\pi\sqrt{2lr}\right)\left(-\sin(3\varphi/2) + 3\sin(\varphi/2)\right), \\ \tau_{r\theta} &= -\left(\overline{P}/4\pi\sqrt{2lr}\right)\left(\cos(3\varphi/2) - \cos(\varphi/2)\right). \end{aligned} \qquad (18)$$

Здесь r и φ – полярные координаты у грани штампа. Главные напряжения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\left(\overline{P}/\pi\sqrt{2lr}\right)\left(1 - \cos(\varphi/2)\right)\sin(\varphi/2), \\ \sigma_3 &= -\left(\overline{P}/\pi\sqrt{2lr}\right)\left(1 + \cos(\varphi/2)\right)\sin(\varphi/2). \end{aligned} \qquad (19)$$

Вид сингулярности, как и следовало ожидать, остался прежним. В первом приближении воспользуемся теорией прочности Кулона-Мора. Для напряжений (19) условие разрушения запишется так:

$$S_V = -\sigma_3 = \left(\overline{P}/\pi\sqrt{2lr}\right)\left(1 + \cos(\varphi/2)\right)\sin(\varphi/2) = R_c. \qquad (20)$$

Анализ выражения (20) показывает, что эквивалентное напряжение достигает максимума при φ=2π/3. Выразив из (20) нагрузку и подставляя φ=2π/3 и $r=r^*$, получаем значение разрушающей нагрузки:

$$\overline{P}^* = R_c\pi\sqrt{2lr^*}\cdot 4/\left(3\sqrt{3}\right). \qquad (21)$$

После подстановки в (21) значений r^*, полученных ранее, и перехода к прочности на местное смятие $R_{loc} = P^*/\delta^2 = \overline{P}^*\delta$ получены результаты, представленные в таблице 2. В таблицу включено решение по теории Лебедева, не представленное здесь, а также результат, получаемый из применения градиентного подхода к задаче Фламана (задача о действии на полуплоскость сосредоточенной силы).

Из таблицы 2 видно, что предлагаемый подход дает результаты более близкие к эмпирической формуле Баушингера (17). При этом следует учитывать, что последняя по определению должна иметь существенный запас. Таким образом, расхождение (1,71-1,44)/1,71×100%=15,8% выглядит правдоподобно. Результат, полученный из решения задачи Фламана также не сильно расходится с результатами решения задачи о жестком штампе.

Таблица 2

Результаты определния предела прочности при местном смятии
на основе задачи о жестком полубесконечном штампе

Метод вычисления	R_{loc}/R_c	
	Исходный подход	Предлагаемый подход
Теория Кулона-Мора (21)	2,14	1,71
Теория Лебедева	2,41	1,92
Задача Фламана	1,57	
Формула Баушингера (17)	1,44	

5) Разработка способа проверки прочности в точках тела, где напряженное состояние описывается расходящимися рядами.

Поскольку для некоторых задач теории упругости решения получены в виде рядов, вопрос о напряжениях в точках, где ряд расходится, является важным. Рассматривая этот вопрос, следует определить, каков физический смысл расходимости ряда применительно к задачам теории упругости. Предположительно это явление связано с некоторой особенностью, имеющейся в конкретной точке тела. Эта особенность для каждого конкретного случая может быть выражена в виде сингулярной функции: степенного вида, логарифмической или комбинированной. Другими словами можно сказать, что за расходящимся рядом «скрывается» некоторая сингулярная функция, вид которой следует установить. После определения вида сингулярной функции к задаче можно применить предлагаемый подход (4)–(6). Например, при кручении стержней с сечениями, имеющими входящие углы, напряжения в вершинах этих углов оказываются бесконечными. Для определения вида сингулярности в данном случае можно прибегнуть к рассуждениям, изложенным в книге о кручении Б. Л. Абрамяна и Н. Х. Арутюняна. Рассматривается некоторый угол поперечного сечения стержня, подверженного кручению (см. рисунок 3).

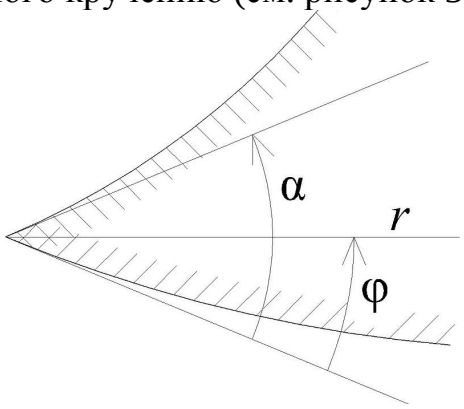

Рис. 3. Система координат вблизи угла сечения стержня, подверженного кручению

Вводятся полярные координаты r и φ, связанные с вершиной этого угла. Касательные напряжения вычисляются по известным формулам:

$$\tau_{rz} = G\theta \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \tau_{z\varphi} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial r} \quad , \tag{22}$$

где G – модуль сдвига, θ – погонный угол закручивания, $U(r,\varphi)$ – функция напряжений, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=-2 \tag{23}$$

и граничным условиям

$$U(r,0)=U(r,\alpha)=0\,. \tag{24}$$

После определения постоянных в общем решении уравнения (23) из условия ограниченности функции $U(r,\varphi)$ и из граничных условий (24) функции напряжений записывается в следующем виде:

$$U(r,\varphi)=\frac{r^2}{2}\left[\frac{\cos(\alpha-2\varphi)}{\cos\alpha}-1\right]+\sum_{k=1}^{\infty} r^{\frac{k\pi}{\alpha}} A_k \sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\,. \tag{25}$$

Для определения касательных напряжений следует воспользоваться выражениями (22):

$$\begin{aligned}\tau_{rz}&=G\theta\left[r\frac{\sin(\alpha-2\varphi)}{\cos\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{\alpha}A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}-1}\cos\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right],\\ \tau_{\varphi z}&=G\theta\left[-r\frac{\cos(\alpha-2\varphi)}{\cos\alpha}+r-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{\alpha}A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}-1}\sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right].\end{aligned} \tag{26}$$

В вершине входящего угла, то есть при r=0 и $\alpha>\pi$, в формулах (2.23) первое слагаемое, а также все члены ряда, кроме первого, равны нулю. Таким образом, напряжения в вершине угла сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau_{rz}\Big|_{\substack{r=0,\\ \alpha>\pi}}&=G\theta\frac{\pi}{\alpha}A_1\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}\cdot\frac{1}{r^{1-\pi/\alpha}},\\ \tau_{\varphi z}\Big|_{\substack{r=0,\\ \alpha>\pi}}&=G\theta\frac{\pi}{\alpha}A_1\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}\cdot\frac{1}{r^{1-\pi/\alpha}},\end{aligned} \tag{27}$$

что соответствует сингулярности степенного вида (4) при $n=1-\pi/\alpha$. Поскольку формулы (27) получены для общего случая, можно утверждать, что при кручении стержней любых сечений вид сингулярности во входящих углах будет соответствовать (27). Для оценки напряжений в данном случает согласно подходу (5), описанному выше, следует «отступить» от вершины угла на величину $r^*=[\Gamma(n+1)]^{1/n}\delta=[\Gamma(2-\pi/\alpha)]^{1/(1-\pi/\alpha)}\delta$ по направлению градиента поля напряжений.

Описанный прием демонстрируется на примере решения **задачи о кручении стержня с сечением в виде сектора круга**. Рассматривается стержень с сечением в виде сектора круга радиусом R и углом α. Стержень подвержен кручению на погонный угол θ.

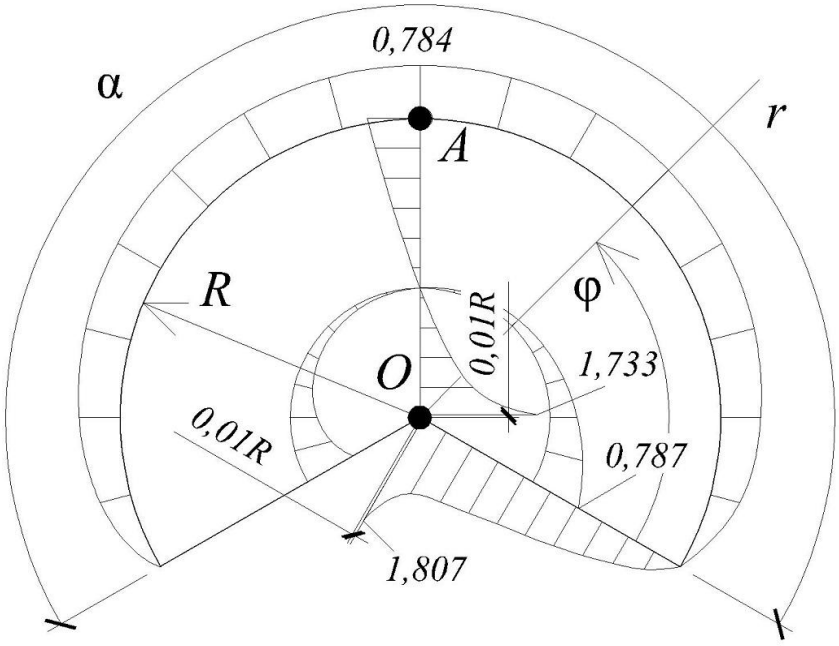

Рис. 4. Распределение напряжений при кручении стержня с сечением в виде сектора круга

В рамках данной работы интерес представляют углы α>π, так как в этом случае напряжения в центральной точке угла оказываются бесконечными. Согласно решению, приведенному в книге Арутюняна и Абрамяна, напряжения имеют следующий вид:

$$\tau_{rz} = -\frac{4G\theta R}{\pi} e^{-t} \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(\alpha/2-\varphi)}{(z^2+4)\mathrm{ch}(z\alpha/2)} \sin zt dz,$$

$$\tau_{\varphi z} = -G\theta R \cdot e^{-t} \left[e^{-2t} + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(z(\alpha/2-\varphi))}{(z^2+4)\mathrm{ch}(z\alpha/2)} \cos zt dz \right], \qquad (28)$$

$$t = \ln(r/R).$$

На рисунке 4 показано распределение напряжений по формулам (28) для сектора круга с углом 240°. Значения приведены в долях от $G\theta R$. Из эпюр напряжений видно, что в сечении можно выделить две опасные точки: регулярную (точка *A*) и сингулярную (точка *O*). На практике в точке *O* обычно выполняется закругление, исключающее появление больших напряжений, и опасной считается точка *A*. Ставится задача оценить прочности в точке *O* без закругления.

Как было сказано, при *r*=0 (точка *O*) имеет место сингулярность. Выше в (22)–(27) показано, что при кручении напряжения во входящих углах сечения соответствуют сингулярности степенного вида (4) при $n = 1 - \pi/\alpha$. Для оценки прочности в данном случае согласно предлагаемому подходу, следует «отступить» от вершины угла на величину $r^* = [\Gamma(n+1)]^{1/n}\delta = [\Gamma(2-\pi/\alpha)]^{1/(1-\pi/\alpha)}\delta$ по направлению градиента поля напряжений, то есть вдоль оси симметрии сечения. На оси симметрии $\tau_{rz} = 0$ и $\sigma_{1,3} = \pm\tau_{\varphi z}$. По исходному подходу В. Д. Харлаба $r_* = n\delta = (1-\pi/\alpha)\delta$.

Таблица 3

Угол α	$\tau/(G\theta R)$		
	Точка A (r=R, φ=α/2)	Точка O (r=0, φ=α/2)	
		Исходный подход $r_* = n\delta$	Модифицированный подход $r_* = [\Gamma(n+1)]^{1/n}\delta$
π/3 (60°)	0,452	0	0
π/2 (90°)	0,559	0	0
4π/3 (240°)	0,784	1,505	1,107
3π/2 (270°)	0,805	1,635	1,202

В таблице 3 приведены значения напряжений в опасных точках в долях от $G\theta R$ для некоторых углов α. Параметр δ=6,7 см (что соответствует тяжелому бетону). Вычисления проводились для R=1 м.

Как видно из таблицы 3, напряжения во входящем угле (точка O) значительно превышают напряжения в центре дуги контура сечения (точка A), что и следовало ожидать. Модифицированный подход дает результат на 26,5% меньше, чем исходный подход. К сожалению, опытные данные для этого случая автору не известны. Однако, ценность представляет тот факт, что решение получено. Это говорит о необходимости дальнейших исследований в данном направлении.

Практический интерес представляют сечения в виде уголка, тавра, двутавра и т. п. Выражения напряжений для них также получены в виде рядов. Как и в рассмотренной задаче о кручении стержня с сечением в виде сектора круга, во входящих углах ряды расходятся. Устранить этот недостаток позволяет предлагаемый подход.

Заключение и выводы

Подытоживая диссертационное исследование, можно сказать следующее. Предложена модификация градиентной теории хрупкого разрушения В. Д. Харлаба, включающая в себя:

1. Использование градиентного преобразования каждого главного напряжения в-отдельности вместо преобразования сложного выражения эквивалентного напряжения (с последующей подстановкой преобразованных напряжений в то или иное классическое выражение эквивалентного напряжения). Это значительно упрощает процедуру применения градиентной теории.
2. Новый способ перехода от регулярной ситуации к сингулярной, приводящий к новой формуле для нахождения точки проверки прочности. Этим обеспечивается единообразие рассмотрения регулярных и сингулярных точек, что снимает некоторую искусственность, присутствующую в рамках исходной теории.
3. Подход, позволяющий осуществлять проверку прочности в точках, где напряжения описываются расходящимися рядами. Это распространяет теорию на новые задачи.

Основной вывод, вытекающий из проделанной работы состоит в том, что модифицированная теория хрупкого разрушения является достаточно обосно-

ванной и как таковая может широко применяться в теоретических и практических расчетах. В частности, она может оказаться полезной в теории железобетона, возвращая ее, вообще говоря, на путь упругих расчетов (соответствующие задачи рассмотрены за пределами диссертации с целью не перегружать ее).

Публикации в рецензируемых изданиях, включенных в список ВАК РФ

1. **Харлаб В. Д.** Развитие градиентной теории прочности (I) / В. Д. Харлаб, П. В. Садиков // Вестник гражданских инженеров – 2007. – №4 (13). – С. 26-30.
2. **Садиков П. В.** Развитие градиентной теории прочности (II) / П. В. Садиков // Вестник гражданских инженеров – 2011. – №2 (27). – С.82-86.
3. **Садиков П. В.** Новое предложение к проверке прочности в сингулярных точках тела / П. В. Садиков // Вестник гражданских инженеров – 2011. – №4 (29). – С.64-68.

Публикации в других изданиях

4. **Садиков П. В.** Об учете градиентного эффекта прочности / П. В. Садиков // Актуальные проблемы современного строительства: Сборник докладов / СПбГАСУ. – СПб., 2006. – С. 101–106.
5. **Садиков П. В.** Модифицированный подход к учету градиентного эффекта прочности / П. В. Садиков // Сборник докладов победителей конкурса грантов 2007 г / СПбГАСУ. – вып. 3. – СПб., 2008. – С. 17-22.
6. **Садиков П. В.** О проверке прочности в сингулярных точках / П. В. Садиков // Актуальные проблемы современного строительства: 64-я Международная научно-техническая конференция молодых ученых. / СПбГАСУ. – Ч. 1. – СПб., 2011. – С. 101–104.